

## Identificación de Modelo de Plantas de Primer Orden mediante Mínimos Cuadrados para Procesos Industriales

Agustín Santiago Ane<sup>1</sup>, David Exequiel Contreras<sup>2</sup>, Roberto Osvaldo Mayer<sup>3</sup>,  
Federico Gabriel D'Angiolo<sup>4</sup>,

<sup>1</sup> Estudiante de Ingeniería Informática, Universidad Nacional de Avellaneda, Argentina.  
agustin.ane@gmail.com

<sup>2</sup> Estudiante de Ingeniería Informática, Universidad Nacional de Avellaneda, Argentina.  
dcontreraspastorini@cev.undav.edu.ar

<sup>3</sup> Ingeniero Electrónico (UTN). Docente en Universidad Nacional de Avellaneda, Argentina.  
rmayer@undav.edu.ar

<sup>4</sup> Ingeniero Electrónico (UBA). Docente en Universidad Nacional de Avellaneda, Argentina.  
fdangiolo@undav.edu.ar

**Resumen.** En el presente trabajo se analizará el algoritmo de Mínimos Cuadrados para identificar los parámetros de un sistema físico o Planta de primer orden. Para la realización de este algoritmo, se utilizará la placa EDU-CIAA dado que contiene un microcontrolador de 32 bits, lo cual permite tener un mayor poder de procesamiento en comparación con una arquitectura de 8 bits.

### 1 Introducción

En muchas situaciones donde se necesita simular el comportamiento de una sistema físico, resulta necesario modelar a dicho sistema, matemáticamente. De esta forma, mediante la simulación, se podrá observar y analizar cómo se ponen de manifiesto las distintas variables que intervienen y las que se desean controlar. Estas variables pueden ser, temperatura, humedad, velocidad de un motor o cualquier otra que se pueda medir o cuantificar. El modelado matemático del sistema, muchas veces resulta difícil de realizar dado que los procesos físicos son lentos o el hardware implicado resulta costoso para modificarlo y realizar distintas pruebas.

Para poder solventar estos inconvenientes, se propone la identificación de los parámetros de una *Planta o sistema físico* mediante algoritmos de *Identificación de Mínimos Cuadrados*. Para comprobar la utilización de este algoritmo, se utilizará una *Planta* de primer orden basada en un circuito R-C. Luego se podrán extrapolar estos

resultados a otra Planta de primer orden, como por ejemplo, un sistema térmico o un sistema hidráulico.

El algoritmo será implementado sobre una plataforma de 32 bits ya que la misma contiene procesamiento vectorial y representación en punto flotante. Con los resultados obtenidos, se podrá tener una primera aproximación de Plantas de primer orden.

### 1.1 Descripción básica del desarrollo

En primera instancia se describirá el análisis y desarrollo del método para la identificación de Plantas de Control. Para el caso particular, se procederá a analizar un circuito R-C de primer orden como Planta, que resultará ser el modelo de referencia. En la Fig.1 se muestra un diagrama en bloques de la Planta que se desea analizar.



**Figura 1.** La planta se representa como  $G(s)$ , en términos de la Transformada de Laplace. La salida,  $Y(s)$ , al igual que la entrada  $U(s)$ , se representan mediante la Transformada de Laplace.

En un sistema de primer orden como este, la función de transferencia resulta ser:

$$G(s) = \frac{k}{1+s\tau} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Siendo:

$k$  = Ganancia del sistema

$\tau$  = Constante de tiempo del sistema de primer orden

$Y(s)$  = Salida del sistema en términos de la Transformada de Laplace

$U(s)$  = Entrada en términos de la Transformada de Laplace

En la transferencia  $G(s)$ , se puede observar que los parámetros característicos resultan ser la ganancia  $k$  y la constante de tiempo  $\tau$ . De esta forma, el algoritmo de identificación deberá obtener estas constantes que caracterizan a dicha Planta.

Esta Transferencia tiene una relación directa entre la entrada y la salida en función del tiempo ( $t$ ), la cual se puede caracterizar por medio de una ecuación diferencial de primer orden como se muestra a continuación:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot u(t) \quad (1)$$

Siendo:

$k$  = Ganancia del sistema.

$\tau$  = Constante de tiempo del sistema de primer orden.

$u(t)$  = Señal de entrada en función del tiempo.

$y(t)$  = Señal de salida en función del tiempo.

Como se mencionó anteriormente, la Planta se encuentra representada mediante un circuito R-C con lo cual la ecuación diferencial (1) se puede escribir como:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (2)$$

Es decir que el único parámetro a estimar resulta ser la constante de tiempo  $\tau$ .

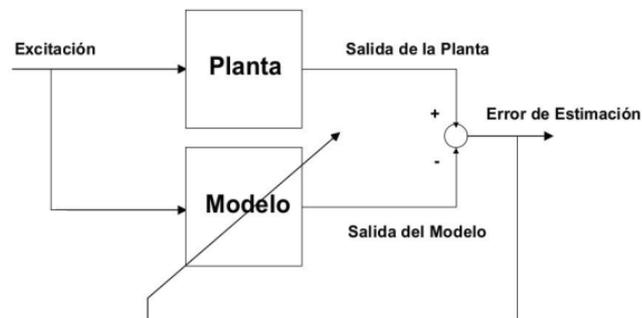
Para este trabajo, se fijarán los valores de resistencia (R) y capacitor (C) de manera que la constante de tiempo ( $\tau = R.C$ ), sea constante. De esta manera, se podrá corroborar el correcto funcionamiento del algoritmo. Una vez constatado esto último, se procederá a cambiar los valores de resistencia y capacitor para observar las limitaciones del algoritmo.

Hasta aquí se tiene caracterizado al sistema en términos de la variable continua  $t$ . A continuación, se explicará cómo realizar el algoritmo de identificación para obtener el parámetro  $\tau$  de la Planta.

## 2 Método de Identificación por Mínimos Cuadrados.

Lo que intenta el método es automatizar la búsqueda de la relación causa-efecto entre la excitación y respuesta de un proceso dado. Para esto, se perturba al sistema

con una determinada señal y se toman pares de muestras de entrada y salida. Se construye una tabla con estos pares para calcular los coeficientes de un *modelo* previamente definido. El método más usual para este cómputo es el de *mínimos cuadrados* del cual se desprenden una cantidad apreciable de algoritmos modificados. La representación gráfica del método se puede observar en la Fig. 2 en donde se observa que la excitación tiene efecto sobre la *Planta* y sobre el *modelo*. Ambos generan una salida que serán más o menos similares dependiendo de la bondad del *modelo*. La diferencia, llamada también error de estimación o predicción, es la que utiliza como realimentación para corregir el modelo. [1]



**Figura 2.** Sistema formado por la Planta y por el Modelo

De esta manera, podemos decir que la *Planta* se encuentra representada por el circuito R-C y el *modelo*, para este trabajo, será representado mediante un sistema digital que será la EDU-CIAA.

Dado que la EDU-CIAA, como cualquier sistema computacional no trabaja de forma continua sino más bien de forma discreta, será necesario que esta placa de desarrollo contenga un *modelo* aproximado de la Planta mediante una *ecuación en diferencias*. Para obtener la discretización de la ecuación diferencial (2) que modela la planta, hay varios métodos, pero aquí se utilizará el método de *Tustin*. Es importante tener en cuenta el período de muestreo ( $T$ ) ya que se está discretizando una ecuación diferencial. De esta forma, la ecuación en diferencias queda como:

$$y_k = a \cdot y_{(k-1)} + b \cdot u_{(k-d)} \quad (3)$$

Siendo:

$y(k)$  = Salida del sistema

$u(k)$  = Entrada del sistemas

$a$  = constante que depende de  $\tau$  y  $T$

$b$  = constante que depende de  $\tau$  y  $T$

Con la representación dada por (3), se podrá identificar a los parámetros de la Planta mediante el algoritmo de *Identificación por Mínimos Cuadrados*.

La ecuación descripta por (3), contiene constantes ( $a$  y  $b$ ) que caracterizan a la Planta, de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{T}{2} \cdot \frac{(1+a)}{(1-a)} \quad (4)$$

Siendo:

$T$  = Período de muestreo.

$a$  = constante que será estimada por el algoritmo.

Con lo cual, una vez que se estimó el valor de  $a$  por medio del algoritmo, se deberá realizar el cómputo (4) para obtener el valor de la constante de tiempo.

Para poder aplicar este algoritmo resultará necesario excitar al sistema descrito en la Fig. 2 con una señal del tipo escalón y obtener la respuesta a la salida del sistema.

El algoritmo propuesto para la identificación de los parámetros, es el siguiente:

$$\hat{\theta}_k = [\phi^T \cdot \phi]^{-1} \cdot \phi^T \cdot Y_k \quad (5)$$

Siendo:

$\phi$  = Matriz que contiene los valores de la entrada y de la salida del sistema

$Y_k$  = Vector con valores de la salida

$\hat{\theta}_k$  = Vector que contiene las constantes  $a$  y  $b$  estimadas

Como se puede observar en (5) las constantes estimadas ( $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ ) dependen solamente de las muestras tomadas a la entrada y a la salida del sistema de la Fig. 2. La matriz  $\phi$  contiene dos columnas, una de ellas son las entradas al sistema que, en este caso resulta ser una señal escalón unitaria y la otra columna está formada por las muestras de la señal de salida.

Es importante destacar que este algoritmo presenta una desventaja, la cual consiste en el cómputo de la inversión de una matriz. En general esto último no resulta cómodo desde el punto de vista computacional pero a continuación se explicará cómo resolver esta situación.

### 3 Algoritmo de cálculo en la EDU-CIAA.

El código desarrollado se inicia tomando muestras de la entrada y de la salida del sistema (escalón unitario y tensión sobre el capacitor), mediante el conversor A/D (analógico - digital). Luego, con estas muestras se va completando la matriz  $\phi$  y el vector  $Y_k$  para luego proceder al cómputo del algoritmo basado en la ecuación (5). Para resolver la inversa de la matriz, se acudió a la solución mediante determinantes lo cual simplificó el algoritmo ya que el cómputo de  $\mathbf{a}$  y de  $\mathbf{b}$  quedó reducido a simples sumas y multiplicaciones. De esta forma, los valores estimados se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{n \sum_{i=1}^n [y_i y_{i+1}] - \sum_{i=1}^n [y_i] \sum_{i=1}^n [y_{i+1}]}{n \sum_{i=1}^n [y_i^2] - (\sum_{i=1}^n [y_i])^2} = \frac{(n \cdot \text{sumCuadK} - \text{sumlin} \cdot \text{sumlink})}{\det \mathbf{M} \mathbf{t} \mathbf{M}} \\
 \mathbf{b} &= \frac{-\sum_{i=1}^n [y_i] \sum_{i=1}^n [y_i y_{i+1}] - \sum_{i=1}^n [y_{i+1}] \sum_{i=1}^n [y_i^2]}{n \sum_{i=1}^n [y_i^2] - (\sum_{i=1}^n [y_i])^2} = \frac{(-\text{sumlin} \cdot \text{sumCuadK} - \text{sumCuad} \cdot \text{sumlink})}{\det \mathbf{M} \mathbf{t} \mathbf{M}}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Los términos que se encuentran a la derecha de la igualdad son los que fueron incluidos en el algoritmo mientras que, los términos que se encuentran a la izquierda de la igualdad, son el cómputo matemático proveniente de la ec (5).

De la ec (6) se puede determinar lo siguiente:

$n$  = Número de muestra del vector salida descontando una posición.

$sum$  = Operación de suma sobre  $i$ , desde 1 hasta  $n$ .

$lin$  =  $y_i$  muestra del vector salida.

$CuadK$  =  $y_i \cdot y_{i+1}$  producto de la señal por la misma desplazada una unidad

$linK$  =  $y_{i+1}$  muestra del vector salida desplazada una unidad.

$detMtM$  =  $n \cdot sumCuad - sumlin^2$  Es el determinante de la matriz traspuesta por la matriz.

$Cuad$  =  $y_i^2$  una muestra de la señal de salida, elevada al cuadrado.

## 5 Resultados obtenidos.

Se realizaron pruebas para diferentes combinaciones de resistencias y capacitores, con el fin de constatar el correcto funcionamiento del programa realizado. En la Tabla 1 se muestran las distintas combinaciones:

**Tabla 1.** Valores de  $a$ ,  $b$  y  $\tau$  obtenidos a partir de la estimación.

C/R	1K $\Omega$	10K $\Omega$	100K $\Omega$
1nF	*	a=-924739E-06 b=74747E-06 $\tau$ =910E-06	a=-990938E-06 b= 7606E-06 $\tau$ =7822E-06
47nF	a = -864465E-06 b = 135545E-06 $\tau$ = 48E-06	a=-859905E-06 b=139997E-06 $\tau$ = 472E-06	a=-984618E-06 b=15097E-06 $\tau$ =4593E-06
100nF	a =-928316E-06 b =71442E-06 $\tau$ = 95E-06	a = -919568E-06 b = 79880E-06 $\tau$ = 849E-06	a= -990420E-06 b = 8147E-06 $\tau$ = 7396E-06
1uF	a=-928235E-06 b = 71458E-06 $\tau$ = 956E-06	a=-991564E-06 b = 7757E-06 $\tau$ = 8405E-06	A=-995788E-06 b = 818E-06 $\tau$ = 16869E-06

---

10 uF	a=-992408E-06	a=-999959E-06	*
	b = 6865E-06	b = 662E-06	
	$\tau$ = 9343E-06	$\tau$ = 1748921E-06	

---

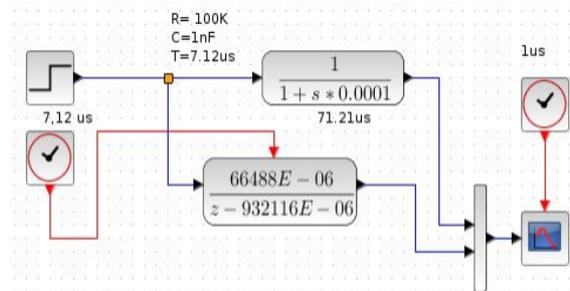
(\*) Cálculos de constante de tiempo muy chica o demasiado grande.

En la Tabla 1 se observan los valores estimados de  $a$  y de  $b$  como así también el valor de la constante de tiempo  $\tau$  obtenida a partir de la ecuación (4). Por ejemplo, si se toma el caso de  $R = 10K\Omega$  y  $C = 47$  nF, la constante de tiempo de la Planta sería de  $\tau = 470$   $\mu$ s mientras que la constante calculada por el modelo arroja un valor de  $\tau = 472$   $\mu$ s. Esto indica que el valor estimado por el modelo es aproximadamente cercano al  $\tau$  de la Planta.

#### 4 Análisis mediante Software

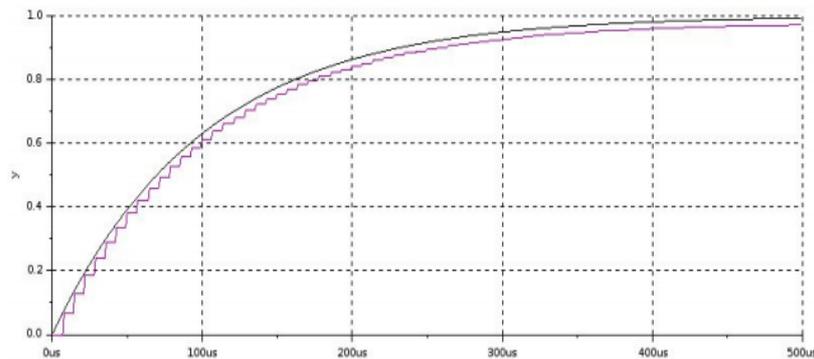
Para concluir el análisis, se tomaron dos valores de resistencia (R) y de capacitor (C) para corroborar el modelado mediante el software Scilab. De esta forma se podrá comparar en forma de simulación a la *Planta* y el modelo obtenido.

Para esta parte se utilizó el XCOS, herramienta que facilita el análisis mediante diagramas en bloques. En la Fig. 3 se observan dos bloques, el que se encuentra en la parte superior de la imagen representa la *planta* como modelo continuo y el bloque inferior representa el *modelo* discreto. Como ejemplo, se tomaron valores de  $R = 100K\Omega$  y  $C = 1$  nF, los cuales arrojaron valores de  $a = -990938E-06$  y  $b = 7606E-06$ .



**Figura 3.** Diagrama en bloques. Comparativa de la respuesta entre el bloque discreto y el bloque continuo para  $R = 100\text{K } \Omega$  y  $C = 1\text{nF}$ .

Dado que la planta es de primer orden (circuito R-C), la señal de salida se aproxima a la evolución de la tensión en el capacitor, como se puede observar en la Fig. 4.



**Figura 4.** El eje horizontal representa el tiempo medido en microsegundos. El eje vertical representa la tensión sobre el capacitor. El trazo continuo representa la salida de la Planta mientras que el trazo escalonado representa la salida del modelo.

Observando la Fig. 4, se puede ver que la respuesta del modelo (salida de la EDU-CIAA), se aproxima a la respuesta de la Planta (circuito R-C), lo cual da una idea de que el modelo se ajusta de forma aproximada a la Planta.

Como trabajo a futuro, se podría probar este modelo en plantas de segundo orden para corroborar la efectividad y las limitaciones del algoritmo. En este tipo de plantas, es importante corroborar la respuesta del sistema dado que de acuerdo a cómo se ubiquen los polos del sistema, el mismo podría tener una respuesta amortiguada, sobreamortiguada o subamortiguada lo cual pondría a prueba el *modelo* y corroborar que las constantes obtenidas sean las adecuadas.

## Referencias

1. Aníbal, Zanini.: Teoría de control para Procesos Industriales. AADECA (2006). ISBN: 978-950-99994-5. [1]
2. B. Friedland.: Control system design. McGraw-Hill, New York, 1986
3. B. Kuo.: Discrete data control system, Prentice Hall (1970)
4. E.F.Camacho.: Model predictive in the process industry (1995)
5. Douglas J. Cooper.: Practical Process Control (2005).
6. Benjamin, Kuo.: Sistemas de Control Automático. 7ma Edición.
7. Katsuhiko Ogata.: Ingeniería de Control Moderna. 5ta Edición.