El costo de eliminación de equilibrios en juegos de suma cero

Ariel Arbiser

Dpto. de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
arbiser@dc.uba.ar

Resumen. Estudiamos el problema de la eliminación de equilibrios de Nash en juegos de suma cero para dos jugadores usando mínimos cambios. Damos algoritmos lineales que, dado un juego, calculan otro sin equilibrios a distancia óptima o sub óptima, de acuerdo a distintas métricas, preservando los dominios de valores así como otras propiedades del juego. Exhibimos para esto distintos sistemas de reglas que, en base a patrones dados por formas ordinales, guían en el proceso de cambio sobre la matriz de pagos.

1 Introducción

En los juegos de suma cero [5-7, 11, 18] para dos jugadores, de estar definido, el valor puro [5-7] rige las decisiones de ambos jugadores cuando éstos son *mutuamente racionales* (cada uno lo es, sabe que el otro también y sabe que éste sabe lo mismo), con lo cual ambos tenderán a elegir estrategias que sean equilibrios de Nash [5, 10-11, 14, 16], las que determinan las ganancias máximas a las que pueden aspirar. Cuando un juego no tiene valor puro, se complican las decisiones y aparecen otros criterios que pueden pretender juzgar el comportamiento del oponente, ya sea en el ámbito de los juegos cooperativos o no cooperativos. El juego resulta más significativo cuando se compite una cierta cantidad de veces (finita o no), ya que las decisiones pueden depender de resultados anteriores, y dan a cada jugador indicios del comportamiento del oponente para futuras decisiones.

Si un juego no tiene equilibrios puros, resulta interesante procurar cambios en la matriz de pagos de modo de obtener equilibrios en ella, dándoles a los jugadores un esquema más claro de decisión. Esto es realista: un coordinador puede considerar el hacer cambios en los pagos para las distintas situaciones en tanto crea que de ese modo incentivará a los jugadores a participar de la contienda a las que estén sometidos. Por otro lado, el evitar la existencia de eventuales equilibrios en un juego también da posibilidades atractivas ante la variedad de criterios que gobiernan los comportamientos. Un juego sin equilibrios es más complejo en proyección estratégica, más allá de que el teorema de Nash [11] garantiza que en el caso finito siempre haya un equilibrio mixto [6, 10-11, 14], esto es, considerando las distribuciones de probabilidad de las estrategias puras como nuevas estrategias y tomando sus valores esperados como pagos. Así, en [4] se parte de la suposición de que la matriz de pagos a priori no es inmutable y los agentes puedan solicitar o *negociar* previamente ajustes (mínimos) en esta matriz, con el fin de lograr otra que tenga equilibrio(s). Dicha negociación constituiría una etapa preliminar, que se da por ejemplo cuando se coordinan precios de bienes –es factible incluso dejar que algunos provengan del azar– antes de las decisiones en el juego propiamente dicho. Y, del mismo modo que es razonable promover situaciones de equilibrio, sostenemos que también lo es para la falta de éstos. Una motivación proviene del hecho de que juegos muy equilibrados no invitan a participar a todos los agentes. Otro motivo es la búsqueda de variación en la economía de un mercado, o el brindar incentivos para una participación reiterada. Así, aún en los casos de los juegos de suma cero más sencillos como el de matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde hay un equilibrio puro en $a_{2,1} = 1$, el jugador *min* (que procura su pérdida más baja) tiene razones para sostener que el juego es menos justo o equitativo que el de matriz B (de *matching pennies* [14-16]), en el cual no hay equilibrios puros y por ende se requerirá igual "esfuerzo" u otra clase de méritos por parte de ambos contendientes, como un análisis a priori del oponente. La matriz B podría pensarse como sin equilibrios vía mínimos cambios (un solo elemento) a partir de A.

Surge entonces un problema antitético del estudiado en [2-4]: buscar en el corto plazo situaciones de no equilibrio, como sugestivas de decisiones de mayor complejidad, motivando la eventualidad de negociaciones y ajustes. Hasta donde tenemos información, no hubo estudios en esta dirección; como aparentemente casi nada acerca de creación de equilibrios, salvo [4] y su referencia a un trabajo anterior, y más distante [1] junto a trabajos afines; pese a lo sencillo que resulta expresar la idea de remoción o minimización de puntos de ensilladura (o *saddle points*) y donde una formulación adecuada para funciones continuas podría conducir a aplicaciones incluso en otras áreas como computación gráfica o diseño asistido por computadora.

En este trabajo presentamos y analizamos el problema de la eliminación de equilibrios de Nash puros en el sentido amplio para juegos finitos o numerables de dos jugadores, suma cero y sin azar, con el fin de llegar no sólo a cotas en las cantidades de cambios necesarios sino a algoritmos que alcancen tal distancia óptima o sub óptima. Una diferencia importante con lo presentado en [2-4] es que allí se estudian óptimos desde un punto de vista existencial, mientras que nosotros seguimos un camino algorítmico.

Como propiedad deseable agregamos que la matriz a obtener deberá preservar hasta donde sea posible no sólo el dominio de la matriz original sino también su imagen, esto es, todos los valores que deben aparecer. A la vez, nos interesa que de ser posible los cambios preserven el valor inferior o superior del juego original, como otra pauta de minimalidad.

A lo largo del artículo damos resultados para distintos dominios y métricas, caracterizando los conjuntos de posiciones factibles de equilibrios en una matriz, y llegando a un conjunto de reglas basadas en patrones que indicarán los cambios necesarios en la matriz con el fin de obtener las cotas necesarias. A modo de aplicaciones adicionales presentamos luego resultados de tipo combinatorio. Finalmente, se discute acerca de aplicaciones y líneas de trabajo futuro.

1.1 Generalidades

Partimos de las siguientes definiciones estándar de la teoría de juegos. Representamos un juego de suma cero para dos jugadores con una matriz A de m×n números reales, donde de acá en más m o n podrían ser infinitos numerables. Las filas representan las decisiones del jugador *max* y las columnas las del jugador *min*. El mecanismo consiste en que el jugador *max* elige una fila, a la vez que el jugador *min* elige una columna;

cada uno toma su decisión sin conocer la decisión del otro. Los elementos de la matriz representan el pago del jugador *min* al jugador *max*, en cada caso de elección de fila/columna; esto es, si *max* elige la fila i y *min* elige la columna j, *max* ganará el valor $a_{i,j}$ y *min* perderá el valor $a_{i,j}$. (Naturalmente, valores negativos indican que pago y cobro se revierten.) Sea $D^{m\times n}$ el conjunto de matrices de m filas y n columnas con valores en el dominio D, para m,n ≥ 1 (pudiendo m o n ser infinitos numerables). Para una matriz $A = (a_{i,j}) \in D^{m\times n}$, la *imagen* de A es $im(A) = \{a_{i,j} / 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}$.

Dada A, se define su *valor inferior* como $\min_{1\leq j\leq n} \max_{1\leq i\leq m} (a_{i,j})$ y su *valor superior* como $\max_{1\leq i\leq m} \min_{1\leq j\leq n} (a_{i,j})$. Si ambos valores coinciden, esa cantidad se llama el *valor* del juego. De acá en adelante, *min* y *max* indicarán ínfimo y supremo respectivamente cada vez que m o n sean infinitos o que la situación se aplique a los números reales. Una *estrategia dominada* para el jugador *max* es una fila i tal que exista otra fila i' con $a_{i',j} \geq a_{i,j}$ para $1 \leq j \leq n$; y análogamente se define para el jugador *min* mediante columnas y la otra desigualdad. Un *equilibrio de Nash puro* (o *equilibrio en estrategias puras*) es una posición (i, j) y elemento $a_{i,j}$, tal que éste sea máximo por filas y mínimo por columnas; i.e. $a_{i,k} \geq a_{i,j} \geq a_{r,j}$ (*estricto* si $a_{i,k} > a_{i,j} > a_{r,j}$) para $1 \leq k \leq m$, $1 \leq r \leq n$. En lo que sigue, *equilibrio* hará referencia a equilibrio puro no estricto –posición o elemento según el contexto–, y todos los juegos serán de suma cero. Aunque el orden entre las filas o las columnas pueda ser irrelevante para un juego en forma normal [6, 14, 18], habrá que tenerlo en cuenta cuando nos interese la eficiencia del tratamiento algorítmico en términos de complejidad temporal.

Dado un juego matricial, se desea encontrar otro *cercano* que cumpla determinadas características, usando determinada *métrica*. Este requerimiento es muy significativo teniendo en cuenta necesidades dentro del diseño de juegos: el diseñador o coordinador [1] podría decidir ajustar los pagos –son parte de las reglas– con el fin de convertirlo en un juego más justo o más adecuado a distintos tipos de participantes. También está contemplado un escenario en que ambos jugadores tengan en una etapa previa posibilidad de comunicación con el fin de llegar a un acuerdo sobre el contenido de la matriz de pagos, esto es, acciones (mínimas) para lograr cambios deseados en las condiciones de pago, lo que será un posible incentivo para uno o ambos jugadores. El tema central de este trabajo es, dado un juego con equilibrios, obtener otro sin equilibrios con mínimos cambios en los elementos de la matriz según cierta métrica. Un juego no equilibrado resulta de mucho interés ya que no hay claridad en las preferencias estratégicas para uno u otro jugador en situaciones de racionalidad, por lo que una competencia requerirá el uso de otros criterios.

Los juegos que no son de suma cero pueden incluir estrategias de interés aún sin ser equilibrios. Tal es el caso del *dilema del prisionero* (DP) en su forma iterada, en el cual un criterio cooperativo puede llevar a elegir la estrategia de cooperación, que no es un equilibrio. En un juego de suma cero queda reducida o desechada la posibilidad de estudiarlo como cooperativo en forma iterada; ya que la ganancia de un jugador es pérdida del otro, no se dará la situación en que ambos elijan cooperar con el fin de incrementar sus ganancias a lo largo de una secuencia. Entonces, si bien la falta de equilibrios no es una condición necesaria para que el juego tenga interés –por ej., en el DP hay un equilibrio y existen muchos estudios como juego cooperativo–, nosotros nos enfocamos en juegos de suma cero, justamente en los cuales la existencia de un equilibrio (esto es, que el juego tenga un valor) desecha la posibilidad de cooperación, lo que acrecienta aún más la motivación de la cuestión que nos ocupa.

A lo largo del texto notamos con Z el conjunto de los números enteros, con R el conjunto de los números reales (podría sustituirse por racionales sin que cambien los métodos ni resultados), y con |D| el cardinal de un conjunto D.

Usaremos primero la distancia discreta entre matrices de m×n. Dadas $A, B \in D^{m\times n}$, se define $d(A,B) = | \{ (i,j) / a_{i,j} \neq b_{i,j} \} |$ la cantidad de diferencias entre los pares de

elementos correspondientes de ambas matrices (*distancia de Hamming* en el contexto de las secuencias de caracteres o bits), la asociada a la norma discreta que cuenta el número de entradas no nulas en una matriz. Sea $S_{m,n}(D)$ el conjunto de matrices de $D^{m\times n}$ con algún equilibrio. Para D = R, $S_{m,n}(D)$ es un cono convexo y cerrado de acuerdo con la topología usual de $R^{m\times n}$.
Sean $\sigma_{m,n}(D, A) = \min \{d(A, B) / B \in S_{m,n}(D)\}$ y $\sigma_{m,n}(D) = \max_A \sigma_{m,n}(D, A)$ [4].
Sean $\sigma'_{m,n}(D, A) = \min \{d(A, B) / B \notin S_{m,n}(D)\}$ y $\sigma'_{m,n}(D) = \max_A \sigma'_{m,n}(D, A)$.

Nos interesan los casos D = R o un subconjunto finito de Z. Cuando hay equilibrios tiene sentido hablar del valor de éste, en virtud del

Lema 1: *Para toda matriz A, todos los equilibrios de A tienen el mismo valor.*
Dem. Si $a_{i,j}$ y $a_{k,r}$ son equilibrios, $a_{i,j} \geq a_{k,j} \geq a_{k,r} \geq a_{i,r} \geq a_{i,j}$ (ya sea que valga i = k, j = r, o ninguna de ambas igualdades).

2 Grillas y cambio mínimo

Tratamos el problema opuesto al de [2-4] que es, dada una matriz, cuántos valores deberán redefinirse como mínimo para que desaparezcan todos los equilibrios. Dicho de otro modo, determinar la distancia a los juegos no equilibrados más cercanos.

Primero tomamos el caso de $R^{m\times n}$. Podemos suponer que m, n ≥ 2, porque si m = 1 o n = 1 inevitablemente existirán uno ó más equilibrios cualquiera sea el dominio (el mínimo y el máximo valor, respectivamente).

Es de fácil determinación la cota min{m,n}, mediante el simple procedimiento de tomar v = min $\{a_{i,j}\}$ - 1 (o bien cualquier real menor que todos los elementos de A), donde A = $(a_{i,j})$, y cambiar los elementos $a_{i,i}$ = v para 1 ≤ i ≤ min{m,n} (es decir sobre la pseudo diagonal hasta el borde inferior o derecho). Son min{m,n} cambios, luego de lo cual no habrá equilibrios. Aunque hay otros juegos a la misma distancia, sólo nos interesa la cota. Por dualidad también se podría usar w = max $\{a_{i,j}\}$ – 1. Si consideramos reales positivos (R^+) y negativos(R^-), $\sigma'_{m,n}(R^+, A)$ requerirá w mientras que $\sigma'_{m,n}(R^-, A)$ requerirá v. En el peor caso, $\sigma'_{m,n}(R,A) \leq \min\{m,n\}$ (lo mismo para R^+ y R^-). Hay matrices que dan la igualdad (e.g., puros ceros), luego $\sigma'_{m,n}(R) = \min\{m,n\}$. Compárese con la desigualdad de [4], cambios mínimos para conseguir equilibrios: $\sigma_{m,n}(R) = \min\{m,n\} - 1$.

Pero lo antedicho no alcanza los cambios mínimos, y podrá existir un conjunto de cambios mucho menor. Para calcular con más exactitud el valor de $\sigma'_{m,n}(R, A)$, se puede seguir el método de la sección siguiente, sobre dominios finitos.

Lema 2: *Dada A ∈ $D^{m\times n}$, si $a_{i,j}$ y $a_{k,r}$ son equilibrios entonces $a_{i,r}$ es un equilibrio (y también $a_{k,j}$ por simetría).*
Dem. $a_{i,j} \geq a_{k,j} \geq a_{k,r} \geq a_{i,r} \geq a_{i,j}$ luego los cuatro valores son iguales. Como cada uno es máximo en su columna y mínimo en su fila, los cuatro son equilibrios.

Una *grilla* de una matriz A es un conjunto de (0 o más) posiciones G tales que si (i,j)∈G y (k,r)∈G entonces (i,r)∈G (y también (k,j)∈G por simetría). Una grilla denota las posiciones de elementos de una sub matriz (con posibles intercalados).

Proposición 1: *Dada A ∈ $D^{m\times n}$, el conjunto de posiciones con equilibrios de A es una grilla de A con elementos todos iguales.*
Dem. Por los Lemas 1 y 2.

Es claro que no todo elemento de A con el valor de un equilibrio tiene por qué ser un

equilibrio. Sólo lo serán los de la grilla.
Un *bloque* o sub grilla convexa de G es un conjunto $P \subseteq G$ tal que si $(i,j) \in P$, $(i',j') \in P$, entonces para todo $k \,/\, i \leq k \leq i'$, para todo $r \,/ j \leq r \leq j'$, $(k,r) \in P$. Una grilla es no convexa cuando hay alguna columna o fila que separe al menos dos bloques distintos. Toda grilla es una unión disjunta de bloques maximales. Tiene entonces sentido hablar de la *grilla de equilibrios* de una matriz, así como hablar de una fila o de una columna de una grilla y de la dimensión de una grilla convexa. Consideraremos permutaciones entre filas y entre columnas de una grilla dado que el orden de las filas (o columnas) no es relevante en un juego matricial salvo en su tratamiento algorítmico.

Lema 3: *Para toda grilla G existe una permutación p entre filas y entre columnas de modo que p(G) es un bloque una de cuyas posiciones es (1,1).*

La siguiente recíproca completa la caracterización del conjunto de posiciones factibles de los equilibrios:

Proposición 2: *Para $|D| \geq 3$, dada G una grilla de $m \times n$ con $m,n \geq 2$, existe una matriz $A \in D^{m \times n}$ tal que G es la grilla de equilibrios de A.*
Dem. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $D = Z_3 = \{0, 1, 2\}$. Si $G = \emptyset$, se toma $A \notin S_{m,n}(D)$ cualquiera, por ej. $a_{i,j} = ((i+j) \bmod 2)$. Si $G \neq \emptyset$, sea $A = (a_{i,j})$ definida por: $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in G$; $a_{i,j} = 2$ si $(i,j) \notin G \wedge \exists k/(k,j) \in G$; $a_{i,j} = 0$ en otro caso. En las posiciones de G están todos los equilibrios de A.

3 Dominios finitos

En [2-4] se exploran cotas de la distancia discreta de una matriz a otra con equilibrios cuando los elementos tienen dominios acotados, es decir sin la posibilidad de recurrir a valores arbitrariamente grandes o pequeños. Se interpreta en un coordinador que podría requerir cambios en las condiciones de pago sin modificar rangos establecidos.

Eliminar un equilibrio para dominios finitos no es trivial. Puede verse que casi cualquier intento naïf de cambio en una posición de equilibrio con valores del dominio, se puede rebatir a partir de algún valor en otra fila o columna, es decir existen matrices tales que cambios aislados crean un equilibrio en otro sector.

Tratamos en primer lugar los dominios finitos, comenzando con cualquier dominio con 2 elementos ordenados, al que representaremos con $Z_2 = \{0,1\}$. En este dominio no vale el método precedente porque el v anterior podría resultar fuera de Z_2. Damos un algoritmo para mínimos cambios sobre $Z_2^{m \times n}$, donde es necesario suponer $m,n \geq 2$ por la misma razón de antes. Incluye la posibilidad de m o n (o ambos) numerables.

Lema 4: *Dada $A \in Z_2^{m \times n}$ e (i,j) la posición de un equilibrio en A, entonces: si $a_{i,j} = 0$ la columna j es idénticamente 0 mientras que si $a_{i,j} = 1$ la fila i es idénticamente 1.*

No debe pensarse que una fila de unos o columna de ceros podrá eliminarse del juego siguiendo la técnica de eliminación de estrategias (débilmente) dominadas, porque esto corresponde al rol del jugador (quien evitará elegir estrategias dominadas) y no al diseñador del mecanismo. Es decir, buscamos un juego con mínimos cambios en el número y calidad de las estrategias factibles, sin restar interés a la situación en que con un solo cambio en esa fila o columna constante el jugador a priori podría elegirla esperando un error del adversario. De hecho, también hay casos en que es suficiente un solo cambio en una fila o columna para que la misma deje de ser dominada.

Algoritmo 1. Eliminación de equilibrios en Z_2

Entrada: $A \in Z_2^{m\times n}$.

Sea G la grilla de equilibrios de A. Si G es vacía, se devuelve A (sin cambios).

De otro modo, sea v el valor de los equilibrios (v = 0 ó 1).

Sea p una permutación entre filas y entre columnas tal que p(G) sea convexa con filas y columnas numeradas desde 1 (dada por el Lema 3), y sea p^{-1} su permutación inversa.

Sea $m' \times n'$ la dimensión de p(G) ($m' \geq 1$ y $n' \geq 1$).

Sea A' = p(A), y sean $a'_{i,j}$ sus elementos ($1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq n'$).

a) Si v = 0, por el Lema 4 A' tiene alguna columna de todos ceros.

a1) Si hay al menos dos columnas de ceros, entonces:

cambiar $a'_{i,i} = 1$ para $0 \leq i \leq m'$

si $m' < n'$, cambiar $a_{m',j} = 1$ para $j > m'$

(es decir "el resto de la fila de la grilla").

a2) Si la columna de ceros es una, la primera de A', entonces hay dos casos:

i) Si todos los otros valores de A' son unos (los hay al ser $n \geq 2$), entonces cambiar $a'_{1,1} = 1$, y $a'_{1,2} = 0$.

ii) Si $\exists$ i, k / $a'_{i,k} = 0$, cambiar $a'_{i,1} = 1$.

b) Si en cambio v = 1, por el Lema 4 hay en A' una fila de todos unos y se procede como en (a) en forma dual.

Salida: $p^{-1}(A')$.

Antes de la salida se deshace la permutación, reordenando filas y columnas. En el caso (b) alternativamente se podría aplicar el caso (a) sobre la matriz $(1 - a_{i,j})^t$ para obtener una matriz B y luego devolver B^t.

Proposición 3: *Dada $A \in Z_2^{m\times n}$ con $m,n \geq 2$, el Algoritmo 1 devuelve una matriz B sin equilibrios tras una cantidad óptima de cambios en A.*

Dem. En (a1), toda fila tendrá al menos un 0 y un 1, y lo mismo toda columna, resultando sin equilibrios por el Lema 4; y cualquier combinación de menos cambios dejará aún una columna de ceros en la grilla, implicando un equilibrio en la matriz. En (a2) (i), por un lado el establecer $a'_{1,j} = 1$ es necesario para que no haya una columna de ceros. A continuación, de no aplicar otro cambio quedaría alguna fila de unos, luego el cambio posterior es necesario. Al ser 1, es mínimo. En (a2) (ii) el cambio es 1, luego mínimo. Observar que la columna k no puede tener todos ceros por hipótesis. El caso (b) se sigue por dualidad.

Es debido al caso (a1) (y a su dual (b1)) que se requieren hasta max{m, n} cambios en lugar de hasta min{m, n} como era posible para D = R.

En el caso de m o n infinitos, naturalmente la cantidad de cambios podría ser infinita, aunque esto no se fuera a implementar en un algoritmo efectivo.

Obsérvese además que no es posible satisfacer la Proposición 2 con un dominio de sólo 2 elementos, por el Lema 4.

Corolario 1: *Sea $d = |D|$. El número de grillas de equilibrios para $m\times n$ es 1 si $d = 1$, $2^m + 2^n$ si $d = 2$, $(2^m-1)(2^n-1) + 1$ si $d > 2$.*

Dem. El caso d = 2 se sigue del Lema 4. Para d > 2, una grilla de equilibrios queda determinada por la intersección (i.e. cruces) entre un subconjunto no vacío de filas y un subconjunto no vacío de columnas; a lo cual se agrega la grilla vacía.

El número de posibilidades es pues exponencial en sus medidas.

De aquí también se caracterizan las cantidades factibles de equilibrios.

Corolario 2: *Sean $m,n \geq 2$ y $|D| \geq 3$, $k < \infty$. Existen matrices en $D^{m\times n}$ con exactamente k equilibrios si y sólo si vale que $k = m'.n'$ con $0 \leq m' \leq m$, $0 \leq n' \leq n$.*

Analizamos ahora el caso finito $D = Z_{q+1} = \{0, 1, ..., q\}$ con $q \geq 2$, a fin de llegar a la remoción de equilibrios con cambios casi mínimos. Es claro que, dada la posición (i,j) de un equilibrio e en A: si e = 0, la columna j es idénticamente 0; si e = q, la fila i es idénticamente q; y si la grilla de equilibrios tiene dimensión m'×n', vale que: si m' < m entonces e > 0, y si n' < n entonces e < q.

Para poder eliminarlos en todas las situaciones posibles con cambios acotados, resulta útil identificar los casos relevantes en el contexto de sólo 2 filas y 2 columnas, es decir analizamos la situación de cuatro elementos y procuramos sólo cambios en ellos de modo que no varíe la situación de los equilibrios del resto de la matriz. Y, a la vez, que el o los que hubiera en esas 2 filas y columnas queden eliminados.

El siguiente es un lema de preservación, de demostración directa, que nos resultará muy útil para verificar la inexistencia de equilibrios en las matrices de salida de los distintos algoritmos. Aunque generalizable a dos filas y dos columnas cualesquiera, nos alcanzará con fijarlo a las dos primeras en presencia del manejo de permutaciones.

Lema 5: *Sean $A, A' \in D^{m\times n}$, $A = (a_{i,j})$, $A' = (a'_{i,j})$, con $m, n \geq 2$.*
Si $a'_{i,j} = a_{i,j}$ para $i>2$ o $j>2$, y
$\min\{a'_{1,1}, a'_{2,2}\} > \max\{a'_{1,2}, a'_{2,1}\}$ o bien
$\max\{a'_{1,1}, a'_{2,2}\} < \min\{a'_{1,2}, a'_{2,1}\}$, y además
$\min\{a_{1,1}, a_{1,2}\} \geq \min\{a'_{1,1}, a'_{1,2}\}$,
$\min\{a_{2,1}, a_{2,2}\} \geq \min\{a'_{2,1}, a'_{2,2}\}$,
$\max\{a_{1,1}, a_{2,1}\} \leq \max\{a'_{1,1}, a'_{2,1}\}$,
$\max\{a_{1,2}, a_{2,2}\} \leq \max\{a'_{1,2}, a'_{2,2}\}$
y A no tiene equilibrios en las posiciones $\{(i,j) / i>2$ o $j>2\}$,
entonces A' no tiene equilibrios.

Aun con las restricciones que surgen de la definición de equilibrio, son varias las configuraciones admisibles de los cuatro valores de las condiciones del Lema 5 (incluyendo posibles repeticiones de ellos), de modo que escribimos un programa que encuentra todos los casos relevantes y verifica la existencia de un cambio adecuado que involucre no más de 2 valores. A este efecto, y para permitir el trabajo con cualquier dominio finito, dados $v_1, v_2, v_3, v_4 \in R$ será útil llevarlos a una *forma ordinal* o *ranking*, esto es cuatro índices i_1, i_2, i_3, i_4 tales que $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subseteq \{0,1,2,3\}$ y además $(v_k < v_r \Rightarrow i_k < i_r)$ para $1 \leq k, r \leq 4$, es decir $i_1,...,i_4$ representarán $v_1,...,v_4$ como números entre 0 y 3 indicando el orden relativo de dichos valores. Con esta forma ordinal estableceremos los cambios esenciales mediante reglas cuya forma y condiciones se ilustran en la Tabla 1, y las que aparecen explícitamente en la Tabla 2 junto con la cantidad de cambios por cada una. Naturalmente, para un dominio de sólo 3 elementos serán ignoradas las reglas que hacen mención del índice 3.

Tabla 1. Forma y condiciones de las reglas

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$	$b \geq a$ y $a \geq c$ $b' < a'$ o $a' < c'$
$a \wedge b \geq a' \wedge b'$ $a \vee c \leq a' \vee c'$ $c \wedge d \geq c' \wedge d'$ $b \vee d \leq b' \vee d'$	$\wedge$ denota mínimo $\vee$ denota máximo
$\{a', b', c', d'\} \subseteq \{a, b, c, d\}$	para todas las reglas excepto la 1

El Algoritmo 2 contempla en (c) y (d) todos los casos que involucran una sola fila o columna, remitiendo a la Tabla 2, que resume todos los casos de 2×2 que pueden alterarse con no más de 2 cambios, usando los mismos valores, con el objeto de que una diagonal domine a la otra y no se reduzcan los máximos por columna ni aumenten los mínimos por fila. Las reglas están normalizadas de modo que $0 \in \{a, b, c, d\}$ y cada lado izquierdo refiera a un *intervalo* de naturales (es decir, que no haya “huecos”), de otro modo podría haber una repetición de casos dado que los valores en el patrón se renumeran.

Esta técnica ofrece además la posibilidad de anular algunos equilibrios que no sean todos. Al eliminar uno, se afecta a aquellos que formen parte de la misma fila o columna. Por la Proposición 1, el mínimo número posible a eliminar será min{m',n'}, correspondiente a una fila o columna de un bloque con dimensiones mínimas.

Tabla 2. Reglas para las formas ordinales de bloques de 2×2 con equilibrio(s) junto a los cambios en cada caso aplicables a la norma discreta y a la norma 1

lado izq (patrón)	lado der (acción)	distancia discreta	distancia norma 1	lado izq (patrón)	lado der (acción)	distancia discreta	distancia norma 1
0 0 0 0	1 0 0 1	2	2	1 2 0 0	1 2 2 0	1	2
0 0 0 1	1 0 0 1	1	1	1 2 0 1	1 2 2 0	2	3
0 1 0 0	0 1 1 0	1	1	1 2 0 2	1 0 0 2	1	2
0 1 0 1	1 0 0 1	2	2	1 2 0 3	1 0 0 3	1	2
0 1 0 2	1 0 0 2	2	2	1 2 1 0	1 2 2 0	1	1
0 2 0 1	0 2 1 0	2	2	1 3 0 2	1 3 2 0	2	4
1 1 0 0	1 0 0 1	2	2	2 2 0 1	2 1 0 2	2	2
1 1 0 1	1 0 0 1	1	1	2 2 1 0	1 2 2 0	2	2
1 1 0 2	2 1 0 2	1	1	2 3 0 1	2 1 0 3	2	4
1 1 1 0	0 1 1 0	1	1	2 3 1 0	2 3 3 0	1	2

Algoritmo 2. Eliminación de equilibrios para Z_{q+1}, $q \geq 2$.

Entrada: $A \in Z_{q+1}^{m \times n}$.

Sea G la grilla de equilibrios de A. Si G es vacía, se devuelve A (sin cambios).

En caso contrario, sea v el valor de los equilibrios. Sea p una permutación entre filas y entre columnas tal que p(G) sea convexa con filas y columnas numeradas desde 1 (dada por el Lema 3), y sea p^{-1} su permutación inversa.

Sea $m' \times n'$ la dimensión de p(G) ($m' \geq 1$ y $n' \geq 1$).

Sea A'= p(A), y sean $a'_{i,j}$ sus elementos, $1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq n'$.

a) Si $1 < m' \leq n'$:

sea $v' = v - 1$ si $v > 0$, $v' = 1$ si $v = 0$;

cambiar los $a'_{i,i} = v'$ para $1 \leq i \leq m'$ (es decir toda la diagonal mayor de G);

si $m' < n'$ cambiar los $a'_{m',j} = v'$ para $j > m'$ (el resto de la fila m’ de la grilla);

b) Si $1 < n' \leq m'$ el tratamiento es análogo al caso anterior.
c) Si $m' = 1 \leq n'$: si $a'_{1,1} = a'_{1,2} = a'_{2,1} = a'_{2,2}$, cambiar

$$(a'_{1,1}, a'_{2,2}) = \begin{cases} (a'_{1,1}+1, a'_{1,1}+1) & \text{si } a'_{1,1} < q, \\ (q-1, q-1) & \text{si } a'_{1,1} = q; \end{cases}$$

en caso contrario:
sea $f = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ la forma ordinal de $(a'_{1,1}, a'_{1,2}, a'_{2,1}, a'_{2,2})$;
para cada uno de los 19 casos la Tabla 2 indica los (1 ó 2) cambios necesarios sobre el orden de dichos índices, lo que se traduce en cambios (sobre 1 ó 2 elementos) en la sub matriz $(a'_{1,1}, a'_{1,2}, a'_{2,1}, a'_{2,2})$ de A'.
d) Si $n' = 1 \leq m'$ el tratamiento es análogo al caso (c), usando las reglas duales.
Salida: $p^{-1}(A')$.

Se hace necesaria la división en casos de acuerdo a la dimensión m'.n' del bloque de equilibrios. Para casos en que éste no se reduzca a una sola fila o columna se utiliza la idea mencionada inicialmente de modificar los valores de la diagonal principal, pero ahora sobre el bloque indicado. La primera parte de (c) es una interpretación de la regla 1 y se trata separadamente porque no vale la inclusión indicada en la Tabla 1.

Más aun, como se verá en la sección siguiente, armamos la Tabla 2 respondiendo a la búsqueda de reglas adecuadas tanto para la norma discreta como para la *norma 1* y la *norma 2*, a ser tratadas después. Nótese que en el caso (c), cuando $a'_{1,1} = q$ es irrelevante si se establece este valor a q - 1 o a cualquier otro distinto de q (en la sección siguiente sí será relevante). Análogamente cuando vale $a'_{1,1} < q$.

El Algoritmo 2 es sub óptimo. Se podría mejorar para reducir como mucho en 1 el número de cambios en los diversos casos de $1\times n'$ o $m'\times 1$ ($m, n < \infty$). Este mismo algoritmo es también aplicable a matrices con valores reales. Nótese que la primera regla es sutil: no indica un bloque de equilibrios de 2×2 sino de 1×2, 2×1 o 1×1. Para un bloque de equilibrios de 2×2 se aplicará el caso (a) dentro del algoritmo.

Proposición 4: *Dada $A \in Z_{q+1}^{m\times n}$ con $m,n,q \geq 2$, $m,n < \infty$, el Algoritmo 2 devuelve una matriz $B \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$ (tras una cantidad sub óptima de cambios en A).*
Dem. En (a) por ejemplo, si $1 < m' \leq n' < n$ y $v = 0$ todo cambio $a'_{k,j} = v'$ para $j > m'$ es necesario. En este caso, en el bloque resultante toda fila o toda columna tendrá un v y un v', resultando sin equilibrios. En (c) se usa el Lema 5.

Una razón por la que tratamos separadamente el caso Z_2 es que todo bloque de equilibrios consiste en filas o columnas enteras; por otro lado, el Algoritmo 1 resulta óptimo y es además mucho más sencillo.

En general, no se conseguirá un número mínimo de cambios si se simplifica el esquema al punto de aplicar reglas que sucesivamente eliminen a los equilibrios de a uno por vez, ignorando la presencia de bloques. El tratamiento de bloques se hace necesario en el caso de varios equilibrios, lo que justifica la necesidad de un algoritmo como el anterior. Como conclusión, para dominios finitos se tiene

Corolario 3: *Dada $A \in Z_d^{m\times n}$ con $m,n,d \geq 2$, existe una matriz $B \notin S_{m,n}(Z_d)$ tal que $d(A,B) \leq \max\{m,n\} = \sigma'_{m,n}(Z_d)$.*

Esta cota es precisa, i.e. mínima para cualquier $d \geq 2$: existen matrices de m×n tales que tras menos de max{m,n} cambios no todo equilibrio desaparecerá. Por ejemplo basta con tomar una matriz idénticamente 0. Para fijar ideas, supongamos que $m \leq n$. Cualesquiera sean los n - 1 cambios, quedará una columna con todos ceros, luego con equilibrios. Por lo tanto $\sigma'_{m,n}(Z_d) = \max\{m,n\}$.
Potencialmente hay aplicaciones directas incluso sin salir del universo de los juegos

con equilibrios. Sea s = $\sigma'_{m,n}$(D, A), entonces, si s > 1, obtenemos grados de libertad en el sentido de que podremos cambiar en A hasta s - 1 elementos cualesquiera y conseguir (gran cantidad de) juegos alternativos que también tengan equilibrios.

4 Complejidad y valores

Para la complejidad temporal asumiremos una arquitectura estándar con costos unitarios uniformes por operación. Los algoritmos involucrados tienen complejidad lineal en el tamaño de la matriz. A partir de las secciones anteriores, el procedimiento efectivo para calcular las distintas matrices no equilibradas se sintetiza en

Corolario 4: ***a)*** *Dada* $A \in R^{m\times n}$ *con* $2 \le m, n < \infty$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(R)$ *tal que* $d(A,B) \le min\{m,n\}$ *en tiempo* $O(min\{m,n\})$. ***b)*** *Dada* $A \in R^{m\times n}$ *con* $2 \le m, n < \infty$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(R)$ *tal que* $\sigma'_{m,n}(R,A) \le d(A,B) \le \sigma'_{m,n}(R,A) + 1$ *en tiempo* $O(mn)$. ***c)*** *Dada* $A \in D^{m\times n}$ *con* $2 \le m, n < \infty$*,* $D \subseteq Z$ *finito,* $|D| \ge 1$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(D)$ *tal que* $\sigma'_{m,n}(D,A) \le d(A,B) \le \sigma'_{m,n}(D,A) + 1$ *en tiempo* $O(mn)$.

Dem. En una primera recorrida se puede memorizar los mínimos por fila y los máximos por columna. Calcular una forma ordinal tiene O(1). Para (b) y (c) no hace falta considerar permutaciones, pudiendo usar un *algoritmo de persecución* del modo siguiente para los casos (a) y (b) del Algoritmo 2. En la primera etapa, marcará las filas y columnas de A que contengan algún equilibrio; en la siguiente etapa, perseguirá estas marcas a lo largo de una y otra dimensión.

```
para i = 1, …, m, sea f_i = min { a_i,j / 1 ≤ j ≤ n }
para j = 1, …, n, sea c_j = max { a_i,j / 1 ≤ i ≤ m }
para i = 1, …, m
  para j = 1, …, n
     si a_i,j = f_i y a_i,j = c_j
        asignar v = a_i,j
        marcar la fila i y la columna j
     fin si
  fin para
fin para
si v > 0, v' = v – 1; si no, v' = 1
i = j = 0
mientras i ≤ m o j ≤ n
  repetir
        si i > m o j > n, terminar
        si i < m, i++
        si j < n, j++
  hasta que i esté marcada o j esté marcada
  si i está marcada
        j = min { j' / j' ≥ j, j' está marcada }
  si no
        i = min { i' / i' ≥ i, i' está marcada }
  fin si
  asignar a_i,j = v'
fin mientras
```

Por otro lado, si los equilibrios están todos en una misma fila o columna, el costo de eliminarlos es 1 ó 2, conforme el siguiente

Corolario 5: *Dada $A \in D^{m\times n}$ con $m,n \geq 2$, si la cantidad de equilibrios de A es 1 o un número primo, entonces $1 \leq \sigma'_{m,n}(D, A) \leq 2$, y las matrices B del Corolario 4 (b) y (c) satisfacen $1 \leq d(A,B) \leq 2$.*

Dem. Por el Corolario 2 hay una permutación que deja a todos los equilibrios en una misma fila o columna. Tanto para D = R como para D finito se verifica cada regla de la Tabla 2 (la columna de distancia discreta tiene valores 1 o 2).

Los procesos de eliminación modifican el valor inferior o superior del juego, pero no ambos a la vez. Esto es, vale la siguiente pauta de minimalidad en los cambios:

Proposición 5: *Dada $A \in D^{m\times n}$, $A = (a_{i,j})$ con $m,n \geq 2$, las $B = (b_{i,j})$ del Corolario 4 satisfacen $\max_i \min_j (a_{i,j}) = \max_i \min_j (b_{i,j})$ o $\min_j \max_i (a_{i,j}) = \min_j \max_i (b_{i,j})$.*

Dem. (resumida) Verificando sobre cada caso incluidos los de la Tabla 2.

Naturalmente, cuando A tenga equilibrios, este *o* es *exclusivo*: no se pueden preservar ambas magnitudes claramente ya que B no tendrá un valor. La Proposición 5 afirma que, tras la eliminación practicada, para uno de los dos jugadores no habrá diferencia en la máxima ganancia a la que puede aspirar con respecto al juego original.

Ante un número infinito numerable de filas o de columnas, podrían hacer falta finitos o infinitos cambios, arrojando consecuentemente una distancia finita o infinita.

Una utilidad extra del proceso anterior se ve en la generación de matrices. En dimensiones finitas, el proceso de construir una matriz aleatoria sin equilibrios –cualquiera sea el dominio y la distribución– también tiene orden lineal. En efecto, por lo anterior primero se puede definir el contenido con valores al azar y luego, de haber equilibrios, eliminarlos con los algoritmos indicados. De esta manera el esfuerzo computacional es esencialmente mínimo.

Un enfoque diferente sobre cambios y distancias al crear o eliminar equilibrios podría sugerir que en lugar de redefinir el contenido de la matriz consideremos la eliminación de estrategias, i.e. filas o columnas enteras. El siguiente lema (donde $B \subseteq A$ indica que B es una sub matriz de A) limita este accionar: una matriz de dimensiones suficientemente grandes siempre tendrá una sub matriz de 2×2 con equilibrio(s); lo que refuerza nuestro enfoque.

Lema 6: *Si $A \in D^{m\times n}$, $\min\{m,n\} \geq 2$ y $\max\{m,n\} \geq 3$, existe $B \subseteq A$ / $B \in S_{2\times 2}(D)$.*

Dem. Podemos suponer $m \leq n$ (el caso $n \leq m$ es análogo). Tomar cualquier $B' \in D^{2\times 3}$ / $B' \subseteq A$. Sea $B' = (b_{i,j})$. Podemos suponer que $b_{1,1} \geq b_{1,2} \geq b_{1,3}$ (en otro caso "reordenamos" las columnas de B'). Si $b_{1,3} \geq b_{2,3}$, tomar como B las dos últimas columnas de B', siendo $b_{1,3}$ un equilibrio. De otro modo, si $b_{1,2} \geq b_{2,2}$, tomar como B las dos primeras columnas de B', siendo $b_{1,2}$ un equilibrio; de no ser así, valen $b_{2,3} > b_{1,3}$ y $b_{2,2} > b_{1,2}$, entonces tomar como B las dos últimas columnas de B', con lo cual $\min\{b_{2,2}, b_{2,3}\}$ es un equilibrio.

No es posible por lo tanto anular los equilibrios en todos los sub juegos no triviales. Desde ya, sin la hipótesis la conclusión podría no cumplirse (*matching pennies* es un ejemplo). Resulta entonces que un proceso de eliminación de filas y/o columnas siempre podrá terminar en un juego equilibrado de dimensión 2x2 o mayor.

5. Dos métricas más precisas

Ahora tratamos los dominios finitos con la *norma 1*. Dadas $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in D^{m\times n}$, adoptamos la métrica $d_1(A, B) = \Sigma_{i,j} |a_{i,j} - b_{i,j}|$ la "distancia del automovilista", que refleja la sola posibilidad de movimientos paralelos a algún eje cartesiano. En Z_2 la distancia d_1 coincide con la discreta, luego en lo que sigue podemos suponer q > 1. Sean $\sigma''_{m,n}(D, A) = \min \{d_1(A, B) / B \notin S_{m,n}(D)\}$ y $\sigma''_{m,n}(D) = \max_A \sigma''_{m,n}(D, A)$. A diferencia de la parte anterior, d_1 tiene en cuenta las distintas magnitudes. La motivación es clara: dentro de las posibilidades de negociación previa, cada ajuste podría denotar un esfuerzo tanto para el coordinador como para los jugadores.

Con el programa anterior extendido de manera conveniente, y bajo las mismas condiciones de la Tabla 1, obtenemos reglas conjuntas para ambas normas, que es la misma Tabla 2. Sin embargo, ahora la interpretación de las reglas y sus costos son distintas: para Z_{q+1}, los valores de 0 a 3 serán directrices de cambios que en el peor caso denotarán valores extremos entre 0 y q, reflejado en la Proposición 6. Como algoritmo de eliminación sub óptimo sirve el Algoritmo 2 sólo que, para la norma discreta, en el caso (c) como se indicó, no importaba la diferencia entre el valor preexistente y su reemplazo, mientras que para la norma 1 esto sí importa ya que las magnitudes afectan a las distancias. Luego, una cota para $\sigma''_{m,n}(Z_{q+1})$ dependerá de max {m,n}, y también de q en los casos de bloques de la forma m’×1 o 1×n’.

Proposición 6: *Dada $A = (a_{i,j}) \in Z_{q+1}^{m\times n}$ con $m,n \geq 2, q \geq 1$, existe $B = (a_{i,j}) \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$ tal que $d_1(A,B) \leq q \max\{m, n\}$; y la cota se alcanza i.e., $\sigma''_{m,n}(Z_{q+1}) = q \max \{m,n \}$. Además, $\max_i \min_j (a_{i,j}) = \max_i \min_j (b_{i,j})$ o bien $\min_j \max_i (a_{i,j}) = \min_j \max_i (b_{i,j})$, y $| \max_i \min_j (a_{i,j}) - \max_i \min_j (b_{i,j}) | + | \min_j \max_i (a_{i,j}) - \min_j \max_i (b_{i,j}) | = 1$.*

Dem. (resumida) Por casos incluyendo la Tabla 2 en donde los lados derechos de las reglas expresan índices sobre las magnitudes.

Corolario 6: *Dada $A \in Z_{q+1}^{m\times n}$ con $m,n \geq 2$, si el número de equilibrios de A es un número primo o 1, entonces $1 \leq \sigma''_{m,n}(Z_{q+1}^{m\times n}, A) \leq 2q$, y la matriz B de la Proposición 6 satisface $1 \leq d_1(A,B) \leq 2q$.*

Dem. Similar a la del Corolario 5.

Tanto con d como con d_1, al aplicar cualquier regla que no sea la 1, valdrá la inclusión *im(B) ⊆ im(A)*, que surge de la inspección de las mismas. A fin de conseguir la igualdad *im(A) = im(B)*, es decir que se utilicen exactamente los mismos valores que los de la matriz dada (pudiendo aparecer más o menos veces algunos de ellos), conseguimos otras reglas adecuadas, pero que aumentan en 1 las distancias en 2 de los casos cuando se emplea la métrica discreta. El sistema resultante difiere del sistema de la Tabla 2 en sólo 2 reglas (entre aquellas cuyos lados izquierdos contienen los cuatro índices). Las reglas modificadas se dan en la Tabla 3. Nuevamente, las 20 reglas son adecuadas a ambas métricas. La igualdad *im(A) = im(B)* provee un “balanceo” en los valores de pago sin salir de los originales. Habría maneras de lograr la preservación de la imagen en todos los casos incluida la regla 1, modificando el caso (c) del Algoritmo 2 adoptando el valor de otra posición en la matriz (de hecho existirá). De otro modo, tanto $a'_{1,1}+1$ como q - 1 podrían estar ausentes (omitimos los detalles).

Tabla 3. Modificaciones a las reglas de la Tabla 2 con el fin de mantener los mismos valores en la imagen, dando así 20 reglas aplicables a la norma discreta y a la norma 1

lado izq (patrón)	lado der (acción)	distancia discreta	distancia norma 1
$\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{matrix}$	$\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{matrix}$	2	2

Finalmente consideramos la *norma 2* o euclidiana: si A = ($a_{i,j}$) y B = ($b_{i,j}$) $\in D^{m\times n}$, su distancia asociada es $d_2(A, B) = \sqrt{\Sigma_{i,j} (a_{i,j} - b_{i,j})^2}$. A priori la Proposición 6 se puede reformular cambiando d_1 por d_2, consecuencia directa de que $d_2(A,B) \leq d_1(A,B)$. Pero se puede dar una cota más fina:

Proposición 7: *Dada* $A \in Z_{q+1}^{m\times n}$ *con* $m,n \geq 2$, $q \geq 1$, *existe una matriz* $B \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$ *tal que* $d_2(A,B) \leq q \sqrt{max\{m,n\}}$.
Dem. De un modo semejante a la de la Proposición 6.

Corolario 7: *Dada* $A \in Z_{q+1}^{m\times n}$ *con* $m,n \geq 2$, $q \geq 1$, *si el número de equilibrios de A es un número primo o 1, entonces* $1 \leq \sigma''_{m,n}(Z_{q+1}^{m\times n}, A) \leq [q\sqrt{2}]$, *y la matriz B de la Proposición 7 satisface* $1 \leq d_2(A,B) \leq [q\sqrt{2}]$.
Dem. Similar a la del Corolario 5.

De lo anterior se desprenden consecuencias de tipo combinatorio aplicables al diseño de juegos, con la creación de matrices de pagos con valores predeterminados. Surge la pregunta de si los valores de una matriz dada pueden permutarse con el fin de obtener equilibrios, así como de evitarlos. Con cualquier conjunto de m.n valores (con posibles repeticiones) es sencillo armar una matriz de m×n con al menos un equilibrio, y bajo ciertas hipótesis se puede satisfacer el otro requerimiento como sigue (reformulable para las otras normas vía las Proposiciones 6 y 7):

Corolario 8: *Si* $m,n,q \geq 2$, $C = (c_{i,j}) \in D = Z_{q+1}^{m\times n}$, *y ningún* $c_{i,j}$ *aparece más de 3 veces en C, entonces existen* $A, B \in D$ *con* $im(A) = im(B) = im(C)$, $A \in S_{m,n}(D)$, $B \notin S_{m,n}(D)$ *y* $1 \leq d(A,B) \leq 2$.
Dem. Sea A = ($b_{i,j}$) $\in Z_{q+1}^{m\times n}$ la matriz consistente en los $c_{i,j}$ ordenados *lexicográficamente* por filas y columnas, i.e., $b_{i,j} \leq b_{i',j'}$ si $i < i' \vee (i = i' \wedge j \leq j')$. Claramente en A el elemento $b_{m,1}$ es un equilibrio. Como por hipótesis cada elemento $b_{i,j}$ aparece 1, 2 ó 3 veces, por el Lema 1 este valor $b_{m,1}$ aparecerá *a lo sumo* esa cantidad de veces. Aplicando el Corolario 5 en su formulación con la Tabla 3, se obtiene una B sin equilibrios con $1 \leq d(A,B) \leq 2$. Como la regla 1 no fue aplicada porque ningún valor aparece más que 3 veces, vale $im(A) = im(B)$.

6 Conclusiones y trabajo futuro

El territorio de las negociaciones sobre matrices de pago había sido hasta ahora poco explorado. Este trabajo representa un avance en la dirección que sugiere posibles acciones previas a un juego por diferencias de intereses de ambas partes –a favor o en contra de que haya equilibrios de Nash– motivando el rediseño de la matriz de pagos. Un juego sin equilibrios puros permite resolver situaciones de desventaja evidente, incentiva a la participación y lleva al estudio de comportamientos. Podemos ver la distancia de un juego a otro sin equilibrios como un "grado de equilibrio" del primero.

Hemos estudiado la eliminación de equilibrios con el fin de obtener juegos a distancia mínima de acuerdo con distintas métricas, en los bipersonales de suma cero finitos o numerables. Se ha llegado a resoluciones efectivas sobre distintos dominios, con un método que tiene la ventaja de estar dirigido por patrones, que requiere una cantidad acotada de reglas según las distintas formas ordinales y que en base a un lema de preservación guían en la eliminación de equilibrios sin que se introduzcan nuevos. Consiste esencialmente en una búsqueda de patrones sobre sub matrices y da una libertad sensible para el emparejamiento de filas y columnas sobre las cuales disparar las reglas. Funciona tanto para la norma discreta (sugerida en [4]) como para otras que consideran las magnitudes; encontrando varias posibilidades de reglas óptimas para una norma y que no lo son para otra. Se consideran las dos primeras filas y columnas para simplicidad de los algoritmos pero bien podrían tomarse dos filas y dos columnas cualesquiera a condición de contener el equilibrio en cuestión. Los algoritmos podrían llevarse a óptimos si se incluyera en ciertos casos la verificación de la existencia misma de equilibrios como otra precondición; pero para las cotas era suficiente la sub optimalidad. También será de interés la reducción de distancias de 2 a 1, a condición de elegir de manera óptima las dos filas y columnas sobre las que actúe cada regla, lo que a priori sería posible mediante un algoritmo $O(m^2n^2)$.

Otra dirección es reformular los sistemas hacia conceptos de solución tales como ε-equilibrios o equilibrios locales. A priori no hay vínculo entre los equilibrios puros tratados y el mixto del juego resultante, pero podrían buscarse condiciones. Otro camino podría ser el transformar los equilibrios puros a uno mixto determinado.

Asimismo, el Lema 6 sugiere el estudio de una forma más fuerte de eliminación que no deje sub matrices equilibradas con determinadas dimensiones. También puede interesar conseguir sistemas de reglas que determinen acciones óptimas conjuntas para métricas como las que ponen pesos en las distintas posiciones de la matriz; o bien dar un tratamiento uniforme para estas u otras métricas.

Referencias

1. T. Alpcan and L. Pavel, "Nash Equilibrium Design and Optimization," Proc. Intl Conf on Game Theory in Communication Networks, Istanbul, Turkey, May 2009.
2. A. Azamov, "On a combinatorial problem of matrix game theory." Collected works "Actual Problems of Control Theory and Mathematical modelling". Tashkent, Fan, pp. 4–8, 1998 (in Russian).
3. A. Azamov, "Combinatorial Approach to Theory of Matrix Games." Uzbek Mathematical Journal, 2, 12–16, 2004.
4. A. Azamov, "On the Metric Approach in the Theory of Matrix Games," *Contributions to Game Theory and Management, Third International Conference on Game Theory and Management*, Volume 3, 22–28, 2010.
5. K. Binmore, *Teoría de Juegos*. Mc Graw Hill, 1994.
6. D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley & Sons, 1954.
7. M. Bramer, *Computer Game Playing Theory and Practice*. Prentice Hall, 1983.
8. H. Chernoff and L. E. Moses, *Elementary Decision Theory*, John Wiley & Sons, 1959.
9. S. Karlin, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*. Vol. 1. *Matrix Games, Programming and Mathematical Economics*. Reading-London, Addison-Wesley, 1959.
10. D. Monderer, Non-cooperative Game Theory, Technion Course 09570, 2002.
11. J. F. Nash, "Equilibrium points in n-person games," Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. 36, 1950.
12. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos and V. V. Vazirani (eds.), *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007.
13. R. J. Nowakowski, *Games of No Chance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
14. Y. Peres, *Game Theory Alive*, Dept. of Statistics, University of California, Berkeley, 2007.
15. J. Pérez Navarro, J. L. Jimeno Pastor y E. Cerdá Tena, *Teoría de Juegos*. Pearson Educación, 2004.
16. M. Pivato, *Voting, Arbitration, and Fair Division. The mathematics of social choice*. Trent University, 2007.
17. K. Prasad, "Observation, Measurement, and Computation in Finite Games," International Journal of Game Theory, 32(4), 455–470, 2004.
18. J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1947.